

حل عددی معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی با روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم

اسماعیل قیصری*^۱، سرمد قادر^۲، عباسعلی علی‌اکبری پیدختی^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد هواشناسی، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران

۲- دکتری مهندسی مکانیک، دانشیار، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران

۳- دکتری دینامیک شاره‌های ژئوفیزیکی، استاد، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران

تاریخ پذیرش مقاله: ۹۴/۰۶/۰۷

تاریخ وصول مقاله: ۹۴/۰۲/۰۶

چکیده

مطالعه فیزیکی معادلات آب کم‌عمق یکی از مسائل مطرح در دینامیک شاره‌های ژئوفیزیکی است. در این کار به بررسی عملکرد روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم برای حل عددی معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی پرداخته می‌شود. برای مقایسه حل عددی با سایر روش‌های تفاضل‌متناهی، معادلات آب کم‌عمق یک‌بعدی به سه روش حل شده و نتایج حاصل برای یک آزمون موردی مقایسه می‌شود. در این حل عددی، برای انتگرال‌گیری بخش زمانی معادلات از روش رونگ-کوتا مرتبه چهار استفاده شده است. به‌علاوه برای مقایسه روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم با سایر روش‌های تفاضل‌متناهی دو معادله مدل ساده، یکی خطی و دیگری غیرخطی، که دارای حل تحلیلی می‌باشند با روش مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم حل شده و خطای کلی آنها با یکدیگر مقایسه می‌شود. مقایسه کمی و کیفی نتایج حاصل شده حاکی از عملکرد بهتر روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم است.

واژگان کلیدی: روش تفاضل‌متناهی، روش فشرده ترکیبی، معادلات آب کم‌عمق، معادله برگرز، معادله فرارفت

مقدمه

معادلات آب کم عمق^۱ بیان کننده حرکت یک شاره در لایه‌ای نازک و تراکم‌ناپذیر می‌باشند که در آنها تقریب هیدروستاتیک برقرار باشد. این معادلات در توصیف کمی پدیده‌های هواشناسی و اقیانوس‌شناسی کاربرد دارند. از دیدگاه کاربرد جوی معادلات مذکور بیان‌کننده یک جو خشک و بدون اصطکاک، با چگالی ثابت، می‌باشند و دارای کاربرد گسترده در دینامیک جو هستند و در شارش‌های پیچیده آزمون مناسبی برای الگوریتم‌های عددی فراهم می‌کنند.

از جمله بررسی‌های عددی صورت گرفته در این مورد می‌توان به کارهای والیس و مالترود (Vallis and Maltrud, 1993)، دریچل و همکاران (Dritschel et al., 1999)، محب‌الحجه و دریچل (Mohebalhojeh and Dritschel, 2000)، گالوسکی و همکاران (Galewsky et al., 2004) و قادر و همکاران (Ghader et al., 2009) اشاره کرد. یکی دیگر از کاربردهای این معادلات برای حل عددی و توسعه و مقایسه الگوریتم‌های جدید در روش‌های مختلف حل عددی می‌باشد. در این کار روش تفاضل متناهی فشرده ترکیبی مرتبه ششم برای حل عددی شکل بسیط این معادلات در یک بعد به کار گرفته می‌شود. روش‌های فشرده ابزارهای قوی برای شبیه‌سازی عددی دینامیک شاره‌ها می‌باشند. نیومروف (Numerov, 1924) و فاکس و گودوین (Fox and Goodwin, 1949) برای اولین بار ایده اصلی روش‌های فشرده را بیان کردند اما استفاده از این روش‌ها در شبیه‌سازی‌های عددی پس از کارهای کریس و اولیگر (Kriess and Oliger, 1972) و هرش (Hirsh, 1975) رواج یافت و لاله (Lele, 1992) انواع مختلفی از این روش‌های فشرده را معرفی کرد. روش‌های فشرده ترکیبی نوع دیگری از روش‌های فشرده می‌باشند که در آنها از مشتق اول و دوم برای تقریب بخش مکانی معادلات به‌طور هم‌زمان استفاده می‌شود (Chu and Fan, 1998; Sengupta and Lakshmanan, 2009). علاوه بر سایر شاخه‌های مکانیک سیالات در حوزه‌های دینامیک شاره‌های

ژئوفیزیکی نیز روش‌های فشرده به کار گرفته شده‌اند. از جمله کارهای انجام شده در زمینه شاره‌های جوی و اقیانوسی که در آنها از روش‌های فشرده استفاده شده می‌توان به عنوان مثال به کارهای محب‌الحجه و دریچل (Mohebalhojeh and Dritschel, 2007)، قادر و همکاران (Ghader et al., 2009)، گلشاهی و همکاران (Golshahy et al., 2011) و قادر و نوردشتروم (Ghader and Nordstorm, 2015) اشاره نمود.

در پژوهش حاضر ابتدا به کمک دو معادله مدل ساده خطی و غیر خطی به بررسی دقت و عملکرد روش‌های تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم با پیمایش زمانی رونگ-کوتا^۲ مرتبه چهارم می‌پردازیم. سپس معادلات آب کم عمق یک بعدی را با سه روش مذکور حل عددی می‌کنیم و نتایج به دست آمده را برای یک آزمون موردی مقایسه می‌کنیم.

معادلات حاکم

معادلات آب کم عمق یک بُعدی به صورت زیر بیان می‌شوند (Vallis, 2006):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن u سرعت در راستای محور x ، g شتاب گرانی و h ارتفاع است. در شکل برداری، معادلات بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} = \vec{G}(\vec{\phi}) \quad (2)$$

اینجا $\vec{\phi} = (u, h)^T$ و $\vec{G} = (G_u, G_h)^T$ است که با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} G_u = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} \\ G_h = -u \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

و بالانویس T نشانگر ترانهاده است.

$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \bar{G}(\bar{\phi})$ ، در هر مرحله مقداری برای تابع $\bar{\phi}$ در یک

گام زمانی میانی محاسبه می‌شود و در مرحله بعد، در همان گام زمانی، اصلاح می‌شود. روابط این روش برای تقریب بخش زمانی معادلات حاکم به شرح زیر است (Durran, 2010):

$$\bar{q}_1 = \Delta t \bar{G}(\bar{\phi}^n), \quad \bar{\phi}_1 = \bar{\phi}^n + \frac{1}{2} \bar{q}_1 \quad (۴)$$

$$\bar{q}_2 = \Delta t \bar{G}(\bar{\phi}_1), \quad \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}^n + \frac{1}{2} \bar{q}_2 \quad (۵)$$

$$\bar{q}_3 = \Delta t \bar{G}(\bar{\phi}_2), \quad \bar{\phi}_3 = \bar{\phi}^n + \bar{q}_3 \quad (۶)$$

$$\bar{q}_4 = \Delta t \bar{G}(\bar{\phi}_3), \quad \bar{\phi}^{n+1} = \bar{\phi}^n + \frac{1}{6}(\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 + 2\bar{q}_3 + \bar{q}_4) \quad (۷)$$

در روابط بالا Δt گام زمانی، n تراز زمانی و q با زیرنویس 1 تا 4 متغیرهای کمکی می‌باشند.

قطری (و یا با تعداد قطره‌های بیشتر) حل می‌کنیم. در این روش‌ها اغلب به علت وارون کردن ماتریس‌های سه قطری یا بیشتر از سه قطر، حجم محاسبات نسبت به روش‌های صریح بیشتر است.

روابط فشرده ترکیبی مرتبه ششم در یک شبکه یکنواخت برای مشتق اول و دوم تابع دلخواه ϕ به صورت زیر نوشته می‌شود (Chu and Fan, 1998):

$$7(\phi'_{i+1} + \phi'_{i-1}) + 16\phi'_i - d(\phi''_{i+1} - \phi''_{i-1}) = \frac{15}{d}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \quad (۸)$$

$$9(\phi''_{i+1} - \phi''_{i-1}) - d(\phi'''_{i+1} - 8\phi'''_i + \phi'''_{i-1}) = \frac{24}{d}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (۹)$$

مشتق اول و دوم تابع ϕ را، در نقاط مرزی، با استفاده از روابط زیر گسسته می‌کنیم (Chu and Fan, 1998).
روابط پیش‌سو برای مرز سمت چپ:

$$6d\phi'_i + \frac{2}{3}d^2\phi''_i + 8d\phi'_{i+1} - \frac{8}{3}d^2\phi''_{i+1} = -15\phi_i + 16\phi_{i+1} - \phi_{i+2} \quad (۱۰)$$

$$14d\phi'_i + 2d^2\phi''_i + 16d\phi'_{i+1} - 4d^2\phi''_{i+1} = -31\phi_i + 32\phi_{i+1} - \phi_{i+2} \quad (۱۱)$$

روابط پس‌سو برای مرز سمت راست:

روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم

روش‌های فشرده، اغلب مرکزی و سه نقطه‌ای هستند، در این روش‌ها برای افزایش دقت علاوه بر خود تابع مشتق‌های آن نیز در نقاط شبکه به‌عنوان مجهول در نظر گرفته شده و سپس از طریق یک دستگاه معادلات جبری شامل خود تابع و مشتق‌های آن حل می‌شوند. بنابراین روش‌های فشرده ضمنی هستند یعنی دستگاه معادلات حاصل را از طریق وارون کردن یک دستگاه معادلات سه

در روابط بالا، مشتق‌های مکانی اول و دوم با علامت پریم مشخص داده شده‌اند، i نشان‌دهنده نقطه شبکه و d فاصله شبکه‌ای است. در روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم

$$8d\phi'_{i-1} + \frac{8}{3}d^2\phi''_{i-1} + 6d\phi'_i - \frac{2}{3}d^2\phi''_i = 15\phi_i - 16\phi_{i-1} + \phi_{i-2} \quad (12)$$

$$-16d\phi'_{i-1} - 4d^2\phi''_{i-1} - 14d\phi'_i + 2d^2\phi''_i = -31\phi_i + 32\phi_{i-1} - \phi_{i-2} \quad (13)$$

چهارم (CD4) نیز حل می‌کنیم. جدول (۱) فرمول‌بندی روش‌های تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم را نشان می‌دهد و در جدول (۲) نیز فرمول‌بندی روابط پیش‌سو و پس‌سو متناسب با این دو روش گسسته‌سازی مکانی آورده شده است (Hirsh, 1975).

برای حل دستگاه معادلات بالا، ضرایب به صورت یک ماتریس بلوکی سه قطری نوشته می‌شود. برای مقایسه عملکرد روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) با سایر روش‌های تفاضل متناهی معادلات را به کمک روش‌های مرتبه دوم مرکزی (SD2) و فشرده مرتبه

جدول ۱- فرمول‌بندی روش‌های مرتبه دوم مرکزی (SD2) و فشرده مرتبه چهارم (CD4) برای محاسبه مشتق اول و دوم تابع در نقاط

داخل شبکه و نقاط مرزی برای شرایط مرزی دوره‌ای

روش	فرمول‌بندی
SD2	$\begin{cases} \phi'_i = \frac{1}{2d}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \\ \phi''_i = \frac{1}{d^2}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \end{cases}$
CD4	$\begin{cases} \frac{1}{6}\phi'_{i-1} + \frac{2}{3}\phi'_i + \frac{1}{6}\phi'_{i+1} = \frac{1}{2d}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \\ \frac{1}{12}\phi''_{i-1} + \frac{5}{6}\phi''_i + \frac{1}{12}\phi''_{i+1} = \frac{1}{d^2}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \end{cases}$

جدول ۲- فرمول‌بندی روش‌های مرتبه دوم مرکزی (SD2) و فشرده مرتبه چهارم (CD4) برای محاسبه مشتق اول و دوم تابع در نقاط

مرزی برای شرایط مرزی غیردوره‌ای.

روش	فرمول‌بندی پیش‌سو	فرمول‌بندی پس‌سو
SD2	$\begin{cases} \phi'_i = \frac{1}{d}(\phi_{i+1} - \phi_i) \\ \phi''_i = \frac{1}{d^2}(\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i) \end{cases}$	$\begin{cases} \phi'_i = \frac{1}{d}(\phi_i - \phi_{i-1}) \\ \phi''_i = \frac{1}{d^2}(\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2}) \end{cases}$
CD4	$\begin{cases} d\phi'_i + \frac{1}{3}d^2\phi''_i + \frac{1}{6}d^2\phi''_{i+1} = \phi_{i+1} - \phi_i \\ d\phi'_{i+1} - \frac{1}{6}d^2\phi''_i - \frac{1}{3}d^2\phi''_{i+1} = \phi_{i+1} - \phi_i \end{cases}$	$\begin{cases} -d\phi'_{i-1} - \frac{1}{6}d^2\phi''_i - \frac{1}{3}d^2\phi''_{i-1} = \phi_{i-1} - \phi_i \\ -d\phi'_i + \frac{1}{3}d^2\phi''_i + \frac{1}{6}d^2\phi''_{i-1} = \phi_{i-1} - \phi_i \end{cases}$

مورد مطالعه در کار حاضر، دو معادله مدل خطی (فرارفت) و غیرخطی (برگرز) را به کمک روش‌های تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم و فشرده ترکیبی مرتبه ششم حل عددی می‌کنیم. با وجود جواب‌های تحلیلی برای این دو مسئله و استفاده از نرم مربعی، L_2 ، می‌توان میزان دقت این روش‌ها را آزمود. این نرم میزان انحراف

بررسی دقت

در این جا پیش از پرداختن به حل عددی معادلات آب کم عمق یک بُعدی ابتدا به مسئله بررسی دقت روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم در مقایسه با دو روش تفاضل متناهی مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم توجه می‌شود. به منظور بررسی دقت و عملکرد روش‌های تفاضل متناهی،

بنابراین شرط $\frac{\partial \phi(1,t)}{\partial x} = 0$ را به‌کار می‌بریم و مرز سمت چپ با زمان ثابت است یعنی در این مرز شرط $\phi(0,t) = 0$ را اعمال می‌کنیم (Durran, 2010).

برای تقریب بخش زمانی معادله فرارفت از روش رونگ-کوتا مرتبه چهار، معادلات (۷)-(۴)، استفاده شده است. مقادیر خطای کلی، با استفاده از نرم L_2 در جدول (۳) آمده است. در حالتی که مرزها دوره‌ای باشند، جواب‌ها در زمان $t = 5$ ثانیه، یعنی زمانی که موج به مکان اولیه برمی‌گردد، محاسبه گردیده و برای شرایطی که مرزها غیر دوره‌ای باشند نتایج برای زمان $t = 0.9$ ثانیه، یعنی زمانی که موج از مرز سمت راست خارج می‌شود، لحاظ شده است. شکل‌های (۱) و (۲) تحول زمانی معادله فرارفت را برای شرایط مرزی دوره‌ای در زمان $t = 5$ ثانیه، به‌ترتیب با تفکیک‌های $n_g = 64$ و $n_g = 32$ نشان می‌دهند (n_g بیانگر تعداد نقاط شبکه است). شکل‌های (۳) و (۴) نیز تحول زمانی معادله با شرایط مرزی غیر دوره‌ای در زمان $t = 0.9$ ثانیه به ترتیب با تفکیک‌های $n_g = 65$ و $n_g = 33$ به تصویر می‌کشند. مقایسه خطای کلی محاسبه شده و همچنین نمودارهای نشان داده شده برای رفتار معادله فرارفت در شرایط مرز دوره‌ای و غیردوره‌ای با تفکیک‌های مختلف بیانگر این واقعیت‌اند که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم بهتر از دو روش دیگر عمل می‌کند.

پاسخ‌های عددی از جواب‌های تحلیلی را مشخص می‌کند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_2(\phi) = \frac{[\sum_{i=1}^n (\tilde{\phi}_i - \phi_i)^2]^{\frac{1}{2}}}{[\sum_{i=1}^n (\phi_i)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

در این رابطه ϕ_i مقدار تحلیلی و $\tilde{\phi}_i$ مقدار حاصل از حل عددی می‌باشد.

معادله فرارفت خطی یک‌بعدی

در این بخش میزان دقت روش‌های به‌کار گرفته شده را با حل معادله فرارفت خطی یک‌بعدی بررسی می‌کنیم. معادله فرارفت در یک بُعد برای تابع موج ϕ به‌شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

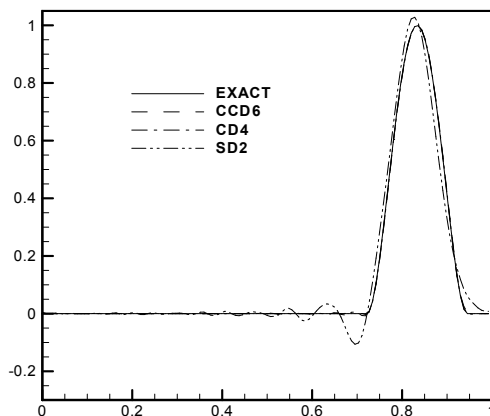
معادله بالا را در فضای یک‌بعدی $0 \leq x \leq 1$ با

فرض $c = 0.2 \frac{m}{s}$ حل می‌کنیم.

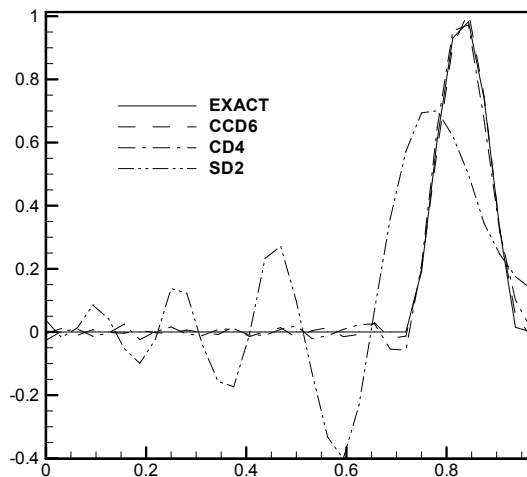
در کار حاضر برای حل عددی از شرط اولیه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\phi(x,0) = \begin{cases} 9^4 [(x - \frac{5}{6})^2 - (\frac{1}{9})^2]^2, & |x - \frac{5}{6}| \leq \frac{1}{9} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

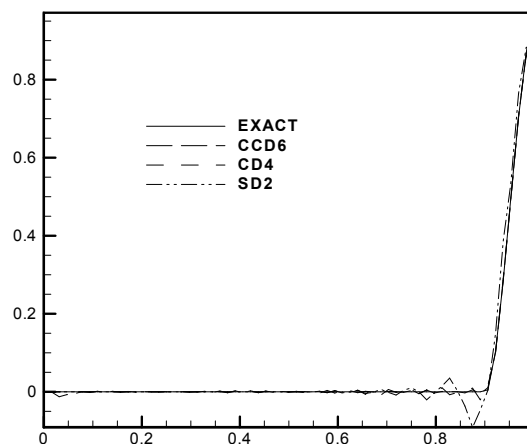
معادله فرارفت را با دو شرط مرزی دوره‌ای و غیر دوره‌ای (مرز باز) به کمک روش‌های SD2، CD4 و CCD6 حل عددی می‌کنیم. برای حالتی که مرزها غیر دوره‌ای باشند، مرز سمت راست (مرز خروجی) باز است



شکل ۱- تحول زمانی موج فرارفت با شرط مرزی دوره‌ای در لحظه $t = 5$ ثانیه برای سه روش SD2، CD4، CCD6 و جواب تحلیلی (EXACT) با تفکیک $n_g = 64$.

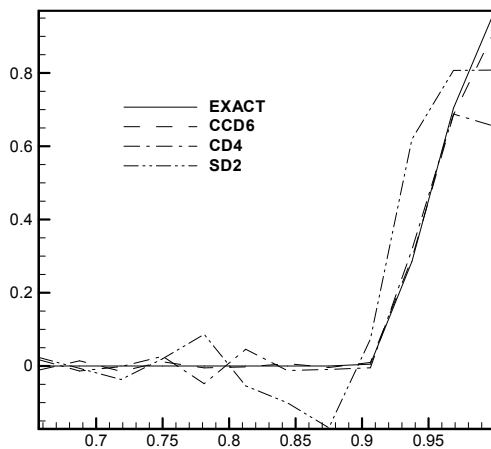


شکل ۲- مانند شکل (۱) ولی با تفکیک $n_g = 32$.



شکل ۳- تحول زمانی موج فرارفت با شرط مرزی غیردوره‌ای در لحظه $t = 0.9$ ثانیه برای سه روش SD2, CD4, CCD6 و جواب

تحلیلی (EXACT) با تفکیک $n_g = 65$.



شکل ۴- مانند شکل ۳ ولی با تفکیک $n_g = 33$.

جدول ۳- مقایسه خطای کلی معادله فرارفت، برای تعداد نقاط شبکه متفاوت، در زمان $t = 5$ ثانیه با شرایط مرزی دوره‌ای و در زمان $t = 0.9$ ثانیه با شرایط مرزی غیردوره‌ای

تعداد نقاط شبکه	خطای کلی (مرز دوره‌ای)	خطای کلی (مرز غیردوره‌ای)
روش مرتبه دوم مرکزی (SD2)		
$n_g = 32$	8.01×10^{-1}	3.67×10^{-1}
$n_g = 64$	4.05×10^{-1}	1.24×10^{-1}
$n_g = 128$	1.31×10^{-1}	4.23×10^{-2}
$n_g = 256$	4.17×10^{-2}	1.37×10^{-2}
$n_g = 512$	1.30×10^{-2}	4.42×10^{-3}
$n_g = 1024$	4.08×10^{-3}	1.42×10^{-3}
روش فشرده مرتبه چهارم (CD4)		
$n_g = 32$	9.53×10^{-2}	2.68×10^{-1}
$n_g = 64$	2.80×10^{-2}	9.57×10^{-2}
$n_g = 128$	8.56×10^{-3}	2.69×10^{-2}
$n_g = 256$	3.45×10^{-3}	7.80×10^{-3}
$n_g = 512$	1.60×10^{-3}	2.42×10^{-3}
$n_g = 1024$	7.85×10^{-4}	7.97×10^{-4}
روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6)		
$n_g = 32$	5.21×10^{-2}	1.46×10^{-1}
$n_g = 64$	1.60×10^{-2}	1.71×10^{-2}
$n_g = 128$	6.53×10^{-3}	7.82×10^{-3}
$n_g = 256$	3.14×10^{-3}	2.29×10^{-3}
$n_g = 512$	1.56×10^{-3}	8.80×10^{-4}
$n_g = 1024$	7.79×10^{-4}	3.28×10^{-4}

این معادله با وجود ماهیت غیرخطی‌اش نیز دارای حل تحلیلی است. برای شرایط اولیه مذکور جواب تحلیلی معادله برگرز برای $t < 45$ چنین است:

$$\phi(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq t \\ \frac{x-45}{t-45}, & t < x < 45 \\ 0, & 45 \leq x \end{cases} \quad (19)$$

در اینجا زمان $t = 45$ ، زمان بحرانی نامیده می‌شود، منظور زمانی است که در آن مشتق تابع ϕ نامتناهی می‌شود.

معادله برگرز یک‌بعدی

معادله برگرز به‌عنوان یک معادله غیرخطی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

در کار حاضر برای حل معادله برگرز از یک شرط اولیه در فضای یک‌بعدی در فاصله $0 \leq x \leq 45$ به‌شکل زیر بهره گرفته می‌شود (Pinchover, 2005):

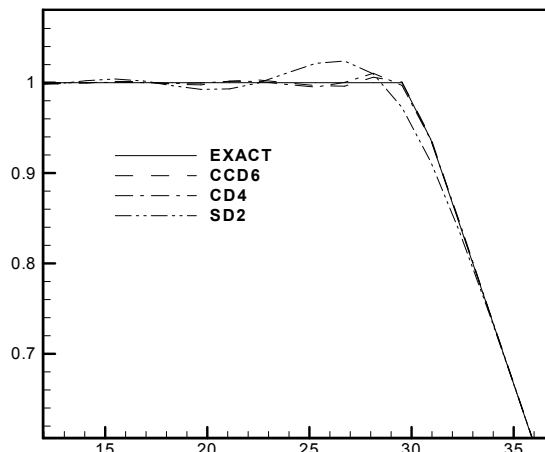
$$\phi(x,0) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{45}, & 0 \leq x < 45 \\ 0, & x \geq 45 \end{cases} \quad (18)$$

تعداد نقاط شبکه مختلف در جدول (۴) آورده شده است. شکل‌های (۵) و (۶) تحول زمانی معادله برگرز را با شرایط مرزی غیر دوره‌ای در زمان $t=30$ ثانیه، به ترتیب با تفکیک‌های $n_g=65$ و $n_g=33$ نشان می‌دهند. مقایسه خطای کلی محاسبه شده و همچنین نمودارهای نشان داده شده برای رفتار معادله برگرز با تفکیک‌های مختلف این واقعیت را می‌نمایاند که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم عملکرد بهتری نسبت به دو روش دیگر از خود نشان می‌دهد.

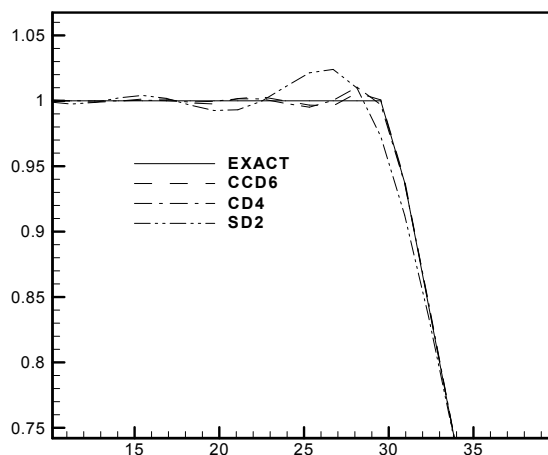
معادله برگرز را با شرط مرزی غیر دوره‌ای (مرز باز) به کمک روش‌های SD2، CD4 و CCD6 حل می‌کنیم. در این مسئله در مرزها شرط مرزی دریکله به کار گرفته می‌شود. این شرط مرزی، شرطی است که در مرزهای راست و چپ تابع ϕ مقداری ثابت و مستقل از زمان می‌باشد. بنابراین در مرز سمت چپ شرط $\phi(0,t)=1$ و در مرز سمت راست از شرط $\phi(45,t)=0$ استفاده می‌کنیم. بخش زمانی معادله برگرز نیز از روش رونگ-کوتا مرتبه چهارم، معادلات (۷)-(۴)، گسسته شده است. مقادیر خطای کلی، با استفاده از نُرم L_2 برای مدت زمان $t=30$ ثانیه با

جدول ۴- مقایسه خطای کلی معادله برگرز، برای تعداد نقاط شبکه متفاوت، در زمان $t=30$ ثانیه با شرایط مرزی غیر دوره‌ای

تعداد نقاط شبکه	خطای کلی (مرز غیر دوره‌ای)
روش مرتبه دوم مرکزی (SD2)	
$n_g = 33$	1.01×10^{-2}
$n_g = 65$	5.35×10^{-3}
$n_g = 129$	2.74×10^{-3}
$n_g = 257$	1.39×10^{-3}
$n_g = 513$	7.06×10^{-4}
روش فشرده مرتبه چهارم (CD4)	
$n_g = 33$	2.46×10^{-3}
$n_g = 65$	1.20×10^{-3}
$n_g = 129$	5.13×10^{-4}
$n_g = 257$	2.36×10^{-4}
$n_g = 513$	1.03×10^{-4}
روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6)	
$n_g = 33$	1.93×10^{-3}
$n_g = 65$	8.55×10^{-4}
$n_g = 129$	3.02×10^{-4}
$n_g = 257$	1.34×10^{-4}
$n_g = 513$	5.25×10^{-5}



شکل ۵- تحول زمانی معادله برگرز با شرط مرزی غیردوره‌ای در لحظه $t = 30$ ثانیه برای سه روش CCD6, CD4, SD2 و جواب تحلیلی (EXACT) با تفکیک $n_g = 65$.



شکل ۶- مانند شکل ۵ ولی با تفکیک $n_g = 33$.

$$Q(0,t) = \begin{cases} -\frac{t}{10}, & 0 \leq t < 60 \\ -[6 - \frac{t-60}{10}], & 60 \leq t < 80 \\ -4, & t \geq 80 \end{cases} \quad (20)$$

برای مرز سمت راست نیز، شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad l = 400m \quad (21)$$

در دو رابطه بالا Q ، دبی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = hu \quad (22)$$

به این شکل شرایط مرزی برای دبی در دو طرف کانال و شرایط اولیه برای حل عددی مسئله مشخص است. در

حل عددی معادلات آب کم عمق یک بعدی

آزمون موردی

برای حل عددی معادلات آب کم عمق یک بعدی از آزمون موردی معرفی شده توسط آبوت و باسکو (Abbott and Basco, 1989) استفاده می‌کنیم. در این آزمون یک کانال پُر از آب در نظر گرفته می‌شود که در حالت اولیه دارای سرعت صفر (حالت سکون)، ارتفاع پنج متر و طول چهارصد متر می‌باشد. این کانال با شرایط مرزی زیر از طرف چپ تخلیه می‌شود:

(h) و سرعت (u) تخلیه شماره را در مرز سمت چپ کانال (مرز خروجی) در زمان‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ ثانیه نشان می‌دهد. نتایج حاصل از حل عددی معادلات آب کم عمق یک بُعدی در کار حاضر، با تعداد نقاط شبکه مختلف، برای ارتفاع، با استفاده از روش مرکزی مرتبه دوم (SD2)، روش فشرده مرتبه چهارم (CD4) و روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6) در مرز سمت چپ کانال (مرز خروجی) در زمان‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ ثانیه، در جدول (۶) و همچنین برای سرعت در جدول (۷) آورده شده است. مقایسه نتایج به دست آمده، با سه روش مذکور، در جدول (۶) و جدول (۷) با جواب‌های دقیق ارائه شده در جدول (۵) بیانگر توانایی مناسب روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم است.

واقع شرایط مرزی ذکر شده در بالا شرایط مرزی فیزیکی مسئله هستند ولی برای حل عددی معادلات آب کم عمق به شرایط مرزی برای هر دو متغیر سرعت و ارتفاع نیاز داریم، لذا لازم است تا به شرحی که در ادامه می‌آید عمل کنیم.

شرایط مرزی برای ارتفاع از طریق میان‌بایی خطی از زمان قبل به صورت زیر تامین می‌شود (Durran, 2010):

$$h_b^{n+1} = 2h_b^n - h_b^{n-1} \quad (23)$$

زیر نویس b نشان‌دهنده، نقطه واقع بر روی مرز می‌باشد.

شرایط مرزی برای سرعت را به کمک رابطه (۲۲) به

$$u(0,t) = \frac{Q(0,t)}{h} \quad \text{و} \quad u(l,t) = 0 \quad \text{به کار می‌بریم.}$$

نتایج

حل دقیق معادلات آب کم عمق یک بُعدی برای آزمون مذکور توسط آبوت و باسکو (Abbott and Basco, 1989) در جدول (۵) آورده شده است. این جدول ارتفاع

جدول ۵- جواب‌های تحلیلی روش مشخصه‌ها، در مرز سمت چپ کانال، برای ارتفاع و سرعت، در زمان‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ ثانیه

روش	$t[s]$	10	20	30	40	50	60
مشخصه‌ها	$h(0,t)[m]$	4.89	4.72	4.56	4.37	4.18	4.0
مشخصه‌ها	$u(0,t)[m/s]$	-0.204	-0.423	-0.658	-0.915	-1.20	-1.50

جدول ۶- نتایج به دست آمده از حل معادلات آب کم عمق، برای ارتفاع، در مرز سمت چپ کانال، در زمان‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و

۶۰ ثانیه برای هر روش با تعداد نقاط شبکه مختلف

$t(s)$	10	20	30	40	50	60
روش مرتبه دوم مرکزی (SD2)						
$n_g = 51$	4.854	4.699	4.539	4.367	4.184	3.983
$n_g = 201$	4.853	4.700	4.539	4.367	4.183	3.982
$n_g = 801$	4.853	4.700	4.539	4.367	4.183	3.982
روش فشرده مرتبه چهارم (CD4)						
$n_g = 51$	4.852	4.699	4.540	4.369	4.195	4.012
$n_g = 201$	4.853	4.700	4.539	4.367	4.181	3.979
$n_g = 801$	4.853	4.700	4.539	4.367	4.182	3.982
روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6)						
$n_g = 51$	4.856	4.702	4.524	4.350	4.202	3.992
$n_g = 201$	4.853	4.700	4.542	4.367	4.170	3.981
$n_g = 801$	4.853	4.700	4.539	4.367	4.181	3.982

جدول ۷- نتایج به دست آمده از حل معادلات آب کم عمق، برای سرعت، در مرز سمت چپ کانال، در زمان‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ ثانیه، برای هر روش با تعداد نقاط شبکه مختلف

$t(s)$	10	20	30	40	50	60
روش مرتبه دوم مرکزی (SD2)						
$n_g = 51$	-0.206	-0.425	-0.660	-0.915	-1.195	-1.506
$n_g = 201$	-0.206	-0.425	-0.660	-0.915	-1.195	-1.506
$n_g = 801$	-0.206	-0.425	-0.660	-0.915	-1.195	-1.506
روش فشرده مرتبه چهارم (CD4)						
$n_g = 51$	-0.206	-0.425	-0.660	-0.915	-1.191	-1.495
$n_g = 201$	-0.206	-0.425	-0.660	-0.915	-1.195	-1.507
$n_g = 801$	-0.206	-0.425	-0.660	-0.915	-1.195	-1.506
روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم (CCD6)						
$n_g = 51$	-0.205	-0.425	-0.663	-0.919	-1.189	-1.502
$n_g = 201$	-0.206	-0.425	-0.660	-0.915	-1.198	-1.506
$n_g = 801$	-0.206	-0.425	-0.660	-0.915	-1.195	-1.506

introduction for engineers, John Wiley & Sons, Inc., New York, PP. 425.

- Chu, P. C. and C. Fan, 1998, A three-point combined compact difference scheme, Journal of computational Physics, No. 140, PP. 370-399.
- Dritschel, D. G., Polvani, Nl. M., and Mohebalhojeh, A. R., 1999, The contour-advective semi-lagrangian algorithm for the shallow water equations, Mon. Wea. Rev., No. 127, pp. 1151-1165.
- Durrant, D. R., 2010, Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer-verlag, New York, PP. 710.
- Fox, L. and E. T. Goodwin, 1949, Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical society, No. 45, pp. 373-388.
- Galewsky, J., Scott, R. K., and Polvani, L. M., 2004, An initial-value problem for testing numerical models of the global shallow-water equations, Tellus, NO. 56A, pp. 429-440.
- Ghader, S., A. R. Mohebalhojeh and V. Esfahanian, 2009, On the spectral convergence of super compact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations, Mon. Wea. Rev, No. 137, pp. 2393-2406.

نتیجه‌گیری

در این کار به بررسی و عملکرد روش‌های تفاضل متناهی، فشرده ترکیبی مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم و مرتبه دوم مرکزی برای حل عددی معادلات آب کم عمق یک بعدی پرداخته شد. مقایسه کمی و کیفی نتایج مربوط به حل عددی برای دو معادله مدل خطی و غیرخطی و همچنین مقایسه نتایج معادلات آب کم عمق یک بعدی برای یک آزمون موردی با حل تحلیلی نشان داد که روش فشرده ترکیبی مرتبه ششم از توانایی بهتری، نسبت به دو روش دیگر برخوردار است. البته نیاز است تا عملکرد روش مذکور برای معادلات پیچیده‌تر مورد بررسی قرار گیرد.

تشکر و قدردانی

نگارندگان مقاله از دانشگاه تهران به خاطر حمایت از این کار پژوهشی تشکر می‌نمایند.

منابع

- Abbott, M. B. and D. R. Basco, 1989, Computational Fluid Dynamics: An

- water equations, Q. J. Roy. Meteorol. Soc., No. 126, pp. 669-688.
14. Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow-water flows, Mon. Wea. Rev., NO. 135, pp. 3876-3894.
 15. Numerov, B. V., 1924, A method of extrapolation of perturbations, Monthly Notices Royal Astronomical Society, No. 84, pp. 592-610.
 16. Pinchover, Y. and J. Rubinstein, 2005, An Introduction to partial Differential Equation, Cambridge University Press, pp. 371.
 17. Sengupta, T. K., V. Lakshmanan and V. V. S. N. Vijay, 2009, A new combined stable and dispersion relation preserving compact scheme for non-periodic problems, Journal of Computational Physics, No. 228, pp. 3048-3071.
 18. Vallis, G. K., and Maltrud, M. E., 1993, Generation of mean flows on a beta plane and over topography, J. Phys. Oceanography., NO. 23, pp. 1346-1362.
 19. Vallis, G. K., 2006, Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and large-scale Circulation, Cambridge University Press, pp. 745.
 8. Ghader, S., and Jan. Nordstorm, 2015, High-order compact finite difference scheme for the vorticity-divergence representation of the spherical shallow water equations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, No. 78, pp. 709-738.
 9. Golshahy, H., S. Ghader and F. Ahmadi-Givi, 2011, Accuracy assessment of the super compact and combined compact schemes for spatial differencing of a two-layer oceanic model: Presentation of linear inertia-gravity and Rossby waves, Ocean Modeling, No. 37, pp. 49-63.
 10. Hirsh, R. S., 1975, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanic's problems by a compact differencing technique, Journal of Computational Physics, No. 19, pp. 90-109.
 11. Kreiss, H. O. and J. Olinger, 1972, Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations, Tellus, No. 24, pp. 199-215.
 12. Lele, S. K., 1992, Compact finite difference scheme with spectral-like resolution, Journal of Computational physics, No. 103, pp. 16-42.
 13. Mohebalhojeh, A. R., and Dritschel, D. G., 2000, On the representation of gravity waves in numerical models of the shallow